

PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA teori dan aplikasi

# PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA

teori dan aplikasi

Drs. Abdul Rahman, M.Pd.  
Nursalam, M.Si.

Penerbit:  
Alauddin Press  
Jl. Sultan Alauddin No. 63 Makassar 90221  
Telp. (0411) 864924 - Fax (0411) 864923



**PERSAMAAN DIFFERENSIAL  
BIASA  
Teori dan Aplikasi**

**Drs. Abdul Rahman, M.Pd.  
Nursalam, M.Si  
Prof. Dr. H. M. Ghalib, MA.**

**SAMBUTAN REKTOR  
UN ALAUDDIN MAKASSAR  
Prof. Dr. H. Azhar Arsyad, M.A.**

Salah satu langkah yang dilakukan oleh UIN Alauddin Makassar pasca direseminkannya pada tanggal 4 Desember 2005 adalah melakukan aktivitas kongkret dan nyata untuk mewujudkan obsesi UIN sebagai pusat peradaban Islam di Indonesia Bagian timur. Upaya yang dilakukan untuk mencapai cita-cita ini adalah dengan mengaktifkan sinerjitas antara ilmu pengetahuan umum dan agama agar supaya tidak terjadi dikotomi antara keduanya.

Langkah kongkret yang dilakukan untuk tujuan di atas dimulai dengan mengggagas system pengajaran pendampingan. Pendampingan memudukan dengan cara mempertemukan silabi umum dan agama, serta memudukan dan mensenyawakan literatur umum dan agama serta pendampingan dan penyenyawaan yang dilakukan dalam diskusi-diskusi lapangan di ruang kelas yang dihadiri oleh pengajar dan dosen bidang umum dan agama.

Buku ini adalah salah satu bentuk nyata dari realisasi dan pengajawantaraan ide sinerjitas ilmu. Buku ini diharapkan untuk memberi kontribusi penting yang dapat melahirkan inspirasi-inspirasi serta kesadaran baru dalam rangka pengembangan keberitmanan kita sebagai bagian dari civitas akademika UIN Alauddin yang muaranya diharapkan untuk mencapai cita-cita UIN Alauddin seperti yang disebutkan di atas. Hal ini sesuai dengan apa yang dikehendaki oleh para tokoh pendidikan muslim pasca konferensi pendidikan Mekkah dan pada konferensi-konferensi pendidikan setelahnya di beberapa Negara.

Semoga buku ini yang juga merupakan buku daras di UIN Alauddin dapat memperoleh ridha Allah. Yang tak kalah pentingnya, buku ini juga dapat menjadi rujukan mahasiswa untuk memandu mereka memperoleh gambaran kongkret dari ide sinerjitas pengetahuan agama dan umum yang menarik diperbincangkan dewasa ini.

Aminen ya Rabbal -Alamien.

Makassar, Januari 2007

**BUKU DARAS  
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA  
Teori dan Aplikasi**

**Penulis**

Drs. Abdul Rahman, M.Pd.  
Nursalam, M.Si  
Prof. Dr. H. M. Ghaliib, MA.

**Layout/Desain Cover**

M. Taufiq 'oi' Ir

**Dicetak oleh**

CV Berkah Utami  
Telp. 0411-868688, Fax. 0411-862408

**Penerbit**

Alauddin Press  
Jl. Sultan Alauddin No. 63, Makassar 90221  
Telp. 0411-864924 – Fax. 0411-864923

Hak Cipta 2007, pada Alauddin Press  
All rights reserved

ISBN: 978 602 8077 27 3



Alhamdulillah! Rabbi! Alamin, segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan dan kesabaran kepada hamba-Nya sehingga dapat menyelesaikan buku daras *Persamaan Diferensial Biasa (Teori dan Aplikasi)*. Salam dan shalawat penulis kirimkan buat junjungan Nabi Muhammad SAW sebagai pembawa rahmat bagi alam semesta serta yang telah membawa manusia pada masa yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Wacana tentang upaya untuk mengintegrasikan antara ilmu agama dan ilmu umum (sains), sangatlah menarik untuk dipelajari. Upaya ini juga didukung oleh kebijakan pemerintah yang melakukan perubahan signifikan atas beberapa IAIN ataupun STAIN menjadi Universitas Islam Negeri (UIN). Kehadiran UIN diharapkan mampu membentuk kurikulum maupun konsep keilmuan yang dikembangkan adalah ilmu pengetahuan yang diintegrasikan dengan ilmu agama. Dampak dari upaya pengintegrasian ini, terlihat dengan maraknya buku-buku yang berusaha untuk mengintegrasikan antara sains dan agama.

Buku Daras Persamaan Diferensial Biasa ini disusun dengan tujuan untuk membantu para mahasiswa / peminat matematika dalam bidang Persamaan Diferensial Biasa. Buku daras ini dapat dipakai sebagai buku pegangan dalam proses pembelajaran Persamaan Diferensial Biasa yang merupakan mata kuliah wajib bagi mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika UIN Alauddin Makassar yang persyaratannya ialah Kalkulus I dan Kalkulus II.

Pengalaman penulis dalam mengajarkan Persamaan Diferensial Biasa selama ini, mahasiswa sangat butuh referensi yang dapat membantu mereka dalam belajar, sehingga terbitnya buku daras ini dapat memotivasi mahasiswa untuk mempelajari Persamaan Diferensial Biasa yang mempunyai bermacam-macam bentuk, yang mana hal itu bukanlah sekedar karangan matematikawan saja, melainkan Persamaan Diferensial tersebut timbul dari proses ilmiah dalam pemodelan mengenai kehidupan nyata ke dalam bentuk model matematika.

Kritik dan saran dari siapa saja yang bertujuan untuk memperbaiki isi buku ini akan kami sambut dengan senang hati. Mudah-mudahan buku ini akan memberikan manfaat bagi para pemakai buku ini.

Makassar, Desember 2007

Penulis

Sambutan Rektor UIN Alauddin Makassar	iii
Kata Pengantar	iv
Daftar Isi	v
<b>Bab 0. Matematika di Dalam Al-Qur'an: Suatu Pengantar</b>	
1. Pengantar	1
2. Tujuan Instruksional Umum	2
3. Tujuan Instruksional Khusus	2
4. Kegiatan Belajar	2
4.1. Isyarat Al-Qur'an untuk Memahami Operasi Bilangan	2
4.2. Operasi Bilangan dengan Satuan Sama	4
4.3. Operasi Bilangan dengan Satuan Berbeda	6
4.4. Isyarat Al-Qur'an tentang Perbandingan	9
4.5. Fungsi	10
4.6. Persamaan Garis	12
4.7. Rangkuman	12
<b>Bab 1. Persamaan Diferensial Tingkat Satu</b>	
1. Pengantar	13
2. Tujuan Instruksional Umum	13
3. Tujuan Instruksional Khusus	13
4. Kegiatan Belajar	14
4.1. Pengertian Persamaan Diferensial	14
4.2. Metode untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Tingkat Satu	19
4.3. Persamaan Diferensial Variabel Terpisah	21
4.4. Persamaan Diferensial Homogen	24
4.5. Persamaan Diferensial Koefisien-Koefisien Linear	30
4.6. Persamaan Diferensial Eksak	36
4.7. Faktor Integritas	42
4.8. Persamaan Diferensial Bernoulli	50
4.9. Latihan	53
4.10. Rangkuman	55
5. Tes Formatif	56
6. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	56
<b>Bab 2. Aplikasi Persamaan Diferensial Tingkat Satu</b>	
1. Pengantar	59
2. Tujuan Instruksional Umum	59
3. Tujuan Instruksional Khusus	59

4. Kegiatan Belajar	60
4.1. Laju Pertumbuhan	60
4.2. Gaya Jauh Bebas	62
4.3. Pegas Bergerak	66
4.4. Rangkaian Listrik	68
4.5. Masalah Pencampuran	71
4.6. Latihan	73
4.7. Rangkuman	74
5. Tes Formatif	75
6. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	76
Bab 3. Persamaan Diferensial Linear Tingkat $n$	79
1. Pengantar	79
2. Tujuan Instruksional Umum	79
3. Tujuan Instruksional Khusus	79
4. Kegiatan Belajar	79
4.1. Persamaan Diferensial Tingkat Tinggi	79
4.2. Persamaan Diferensial Linear Dengan Koefisien Konstan	80
4.3. Persamaan Diferensial Linear Homogen yang Koefisien-Koefisiennya Fungsi Istimewa dari $x$	82
4.4. Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen	84
4.5. Operator D	90
4.6. Latihan	92
4.7. Rangkuman	94
5. Tes Formatif	94
6. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	95
Bab 4. Persamaan Diferensial Dari Kumpulan Garis Kelengkungan Datar	97
1. Pengantar	97
2. Tujuan Instruksional Umum	97
3. Tujuan Instruksional Khusus	97
4. Kegiatan Belajar	97
4.1. Persamaan Diferensial Dari $F(x, y, a) = 0$	97
4.2. Persamaan Diferensial Dari $F(x, y, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$	99
4.3. Persamaan Diferensial Dari Garis Kelengkungan yang Sifat-Sifatnya Diketahui	100
4.4. Trayektori	103
4.5. Latihan	109

4.6. Rangkuman	110
5. Tes Formatif	110
6. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	110
Bab 5. Sistem Persamaan Diferensial Linear	113
1. Pengantar	113
2. Tujuan Instruksional Umum	114
3. Tujuan Instruksional Khusus	114
4. Kegiatan Belajar	114
4.1. Sistem PD Linear Orde Satu	114
4.2. Bentuk Matriks dari Sistem PD Linear Orde Satu	115
4.3. Mengubah PD tingkat $n$ ke Bentuk Sistem PD Orde Satu	117
4.4. Penyelesaian Umum dari Sistem PD Linear Orde Satu	118
4.5. Penyelesaian Sistem PD Homogen	120
4.6. Latihan	129
4.7. Rangkuman	130
5. Tes Formatif	131
6. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	131

Daftar Pustaka

**Kunci Jawaban Tes Formatif-5**  
 Penyelesaian umum PD adalah

$$x = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

dan diperoleh  $c_1 = -2; c_2 = 1$

Matrix fundamental adalah:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2 \sin 2t & 2 \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{-1}(0) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2 \sin 2t & 2 \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t & -\frac{5}{2} \sin 2t \\ \frac{1}{2} \cos 2t & \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix}$$

Penyelesaian partikulirnya adalah:

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} & 20e^{3t} \\ 3e^{2t} & -e^{-2t} & 12e^t \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & e^{-4t} & 20e^{3t} \\ 3 & -e^{-4t} & 12e^t \end{pmatrix}$$

Abdusyakin, 2006. *Ala Matematika dalam Al-Qur'an*. UIN Malang Press. Malang.

Baisuni, H., *Kalkulus*. Universitas Indonesia Jakarta.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R., 1982. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. New York

Basya, Fahmi, 2005. *Matematika Islam*. Republika Jakarta.

Goode, S.W., 1991. *An Introduction to Differential and Linear Algebra*. Prentice Hall International Editon.

Kartono, K., *Persamaan Diferensial Biasa*. Andi Offset Yogyakarta.

Kharib, M. 1988. *Sains dan Islam*. PT. Al-Ma'rif Bandung.

Kusumah, S., 1989. *Persamaan Diferensial Biasa*. Depdikbud Jakarta.

Marono, K., 1990. *Kalkulus dan Persamaan Diferensial Biasa*. ITB Bandung.

-----, *Kalkulus*. Erlangga Jakarta.

Mundit, K. A., 1984. *Soal-soal Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa*. Amico. Bandung.

Purcell, E.J., 1987, *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Erlangga Jakarta.

Riohlang, R.H., 1983. *Persamaan Diferensial Biasa*. Binacipta.

Santoso, W., 1988, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga Jakarta.

Santoso, W., Pamuntyak, R.J., *Persamaan Diferensial Biasa*. Depdikbud, Dirjen Dikti. Jakarta.

Sudrajat, S., 1986. *Persamaan Diferensial Biasa*. Karunika. Jakarta.

Sumartono, N., 1987. *Kalkulus Lanjutan*. Universitas Indonesia. Jakarta.

Wile, C, R., 1979. *Differential Equatin*. Mc Graw-Hill Kagoakusa.